

Druckerhöhung in der zylindersymmetrischen Lichtbogensäule bei überlagertem axialem Magnetfeld

S. WITKOWSKI

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. **20 a**, 463—466 [1965]; eingegangen am 24. Dezember 1964)

Numerical calculations of pressure increase in the plasma of a cylindrical arc column are presented. We assume applicability of the corona-equation. Results are given for magnetic fields up to 50 kT , external pressures of 10^{-1} to $2 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$ and temperatures up to $80\,000^\circ\text{K}$. Finally, the results are compared with calculations using the SAHA-equation.

Überlagert man einer stationären, zylindrischen Lichtbogensäule ein achsenparalleles, homogenes Magnetfeld, so erhält man einen Anstieg des Druckes in der Umgebung der Achse, der im wesentlichen dadurch bewirkt wird, daß das Magnetfeld den ambipolaren Diffusionsstrom der Ladungsträger in radialer Richtung vermindert. Der Druckanstieg wurde von WIENECKE¹ für den Fall lokalen thermischen Gleichgewichts unter Verwendung der SAHA-Gleichung berechnet. Diese Annahme ist für Hochdruckbögen in der Regel eine gute Näherung. Bei niedrigen Drucken jedoch können Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht wesentlich werden^{2,3}.

Analog zu¹ soll im folgenden der Druckanstieg für solche Niederdruckbögen berechnet werden, bei denen das Verhältnis der Elektronendichte zur Neutralgasdichte durch die Koronaformel^{4,5} beschrieben wird. Dieser Fall liegt vor, wenn in einem Plasma wegen der geringen Elektronendichte Dreierstoßrekombinationen zu vernachlässigen sind, und sich ein stationäres Gleichgewicht dadurch einstellt, daß in der Zeiteinheit die Anzahl der Stoßionisationen gleich der Anzahl der Strahlungsrekombinationen wird.

I. Rechnungen

Wie in¹ gehen wir aus von den Bewegungsgleichungen für ein Dreikomponenten-Plasma nach SCHLÜTER⁶ und spezialisieren die Gleichungen auf Zylindersymmetrie. Die kinetischen Temperaturen der Komponenten seien gleich: $T_i = T_e = T_0 = T$, es

herrsche Quasineutralität $n_i = n_e$, das Gesamtplasma sei in Ruhe $v = 0$, das Magnetfeld habe nur eine z -Komponente und die radiale Komponente des elektrischen Stromes j_r verschwinde.

Die Umformungen bis Gl. (22) in¹ können unverändert übernommen werden:

$$\text{grad}_r p = - \frac{(e^2/c^2) B_z^2}{(n_i + n_0) [n_i \varepsilon_{ie} (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) + n_0 \varepsilon_{i0} \varepsilon_{e0}]} \text{grad}_r p_0. \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung sollen nun die Variablen p_0 , n_0 , n_i eliminiert werden. Den Zusammenhang zwischen Ionendruck p_i und Neutralteilchendruck p_0 liefert hier die Koronaformel (nicht wie in¹ die SAHA-Formel):

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi^3} \frac{1}{\gamma} \frac{\exp\{-E_i/kT\}}{E_i/kT} \left(1 + \frac{0,3}{E_i/kT}\right); \quad (2)$$

$\alpha = 1/137$ reziproke SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante, $E_i = 13,6 \text{ eV}$ Ionisationsenergie vom Wasserstoff, $\gamma =$ Faktor zwischen 1,4 und 4 (berechnet von ELWERT).

Wir verwenden $\gamma = 1,6$ und erhalten damit für unseren Bereich (T in $^\circ\text{K}$)

$$p_i/p_0 = K(T) = 3,3 \cdot T \exp\{-15,8 \cdot 10^4/T\}. \quad (2a)$$

Weitere Beziehungen liefern das DALTONSCHE Gesetz

$$p = 2p_i + p_0 \quad (3)$$

und die ideale Gasgleichung

$$p_l = n_l k T. \quad (4)$$

Aus der Kombination von (2a) und (3) erhält man

$$p_i = \frac{K \cdot p}{1+2K}, \quad p_0 = \frac{p}{1+2K}. \quad (5), (6)$$

⁴ L. BIERMANN, Naturwiss. **34**, 87 [1947].

⁵ G. ELWERT, Z. Naturforsch. **7a**, 432 [1952].

⁶ A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **6a**, 73 [1951].

¹ R. WIENECKE, Z. Naturforsch. **18a**, 1151 [1963].
² D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Proc. Roy. Soc., London A **267**, 297 [1962].
³ D. R. BATES, A. E. KINGSTON u. R. W. P. McWHIRTER, Proc. Roy. Soc., London A **270**, 155 [1962].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Die Differentiation von (6) ergibt

$$\frac{dp_0}{dr} = \frac{1}{1+2K} \frac{dp}{dr} - \frac{2p}{(1+2K)^2} \frac{dK}{dr}.$$

Da T eine monotone Funktion des Radius r ist, kann man auch schreiben

$$\frac{dp_0}{dr} = \frac{1}{1+2K} \frac{dp}{dT} \frac{dT}{dr} - \frac{2p}{(1+2K)^2} \frac{dK}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (6 \text{ a})$$

Berücksichtigt man die Beziehungen

$$n_i = \frac{p_i}{kT} = \frac{Kp}{(1+2K)kT},$$

$$n_0 = \frac{p_0}{kT} = \frac{p}{(1+2K)kT},$$

so erhält man schließlich nach einigen Umformungen

$$\frac{dp}{dT} = \frac{2p(e^2/c^2)B_z^2 \cdot dK/dT}{[p^2(1+K)/(kT)^2] [K \varepsilon_{ie}(\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) + \varepsilon_{i0}\varepsilon_{e0}] + (1+2K)(e^2/c^2)B_z^2}. \quad (7)$$

Den Ausdruck für B_z entnehmen wir wie in ¹ der Druckbilanz

$$B_z^2 = B_A^2 + 8\pi(p_A - p). \quad (8)$$

Hierin ist B_A das Magnetfeld außerhalb des Plasmas und p_A der zugehörige, außerhalb der Bogensäule herrschende Druck. (In allen hier behandelten Fällen ist $(B_A - B_z)/B_A < 0,1\%$, man kann also $B_z \approx B_A$ setzen).

Die Reibungskoeffizienten können als Funktion des Gesamtdrucks und der Temperatur geschrieben werden, K ist eine reine Temperaturfunktion. (7) ist daher eine Differentialgleichung in p und T , die numerisch gelöst werden kann.

II. Numerische Auswertung

Die Rechnung wurde für ein Wasserstoffplasma durchgeführt. Folgende Funktionen und Zahlenwerte wurden verwendet:

Koronaformel:
$$K = 3,3 \cdot T \cdot \exp\left\{-\frac{15,8 \cdot 10^4}{T}\right\},$$

$$\frac{dK}{dT} = 3,3 \left(1 + \frac{15,8 \cdot 10^4}{T}\right) \exp\left\{-\frac{15,8 \cdot 10^4}{T}\right\}, \quad \left. \begin{array}{l} T \text{ in } {}^\circ\text{K} . \end{array} \right.$$

Reibungskoeffizienten:

$$\varepsilon_{ie} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi} k T m_e} Q_{ie}, \quad \varepsilon_{i0} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi} k T \frac{m_0}{2}} Q_{i0}, \quad \varepsilon_{e0} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi} k T m_e} Q_{e0};$$

Wirkungsquerschnitte:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{kT}{e^2 n_e^{1/3}} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2} \left(\frac{1+2K}{Kp}\right)^{1/3} \text{cm}^2, \quad Q_{i0} = 70 \cdot 10^{-16} \text{cm}^2, \quad Q_{e0} = 120 \cdot 10^{-16} \text{cm}^2.$$

Damit kommt man schließlich zu folgender Form der Gl. (7)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{2p B_z^2 \cdot dK/dT}{[9,85 \cdot Q \cdot p^2(1+K)/T] \{[(\ln A)/T^2] K(1+3,3 \cdot 10^{-2} \cdot Q_{e0}/Q_{i0}) + 3,6 \cdot 10^{-11} Q_{e0}\} + (1+2K) \cdot B_z^2} \quad (7 \text{ a})$$

mit

$$B_z^2 = B_A^2 + 2,51 \cdot 10^{-7} (p_A - p), \quad (8 \text{ a})$$

in die Q_{i0} und Q_{e0} in Einheiten von $[10^{-16} \text{cm}^2]$, die Feldstärke B_A in Einheiten $[10^4 \text{G}]$, der Druck p_A in $[\text{dyn/cm}^2]$ eingesetzt werden. Die Differentialgleichung (7 a) wurde auf der IBM 7090 mit p_A und B_A als Parameter gelöst.

III. Diskussion der Ergebnisse

In den Abb. 1 bis 3 ist der auf die beschriebene Weise berechnete Druckanstieg als Funktion der

Temperatur für verschiedene Außendrücke p_A von 10^{-1}dyn/cm^2 bis $2 \cdot 10^5 \text{dyn/cm}^2$ und Magnetfeldern von 1 bis 50kG dargestellt. Man kann demnach mit Magnetfeldern von einigen 10kG Druckverhältnisse von mehreren Zehnerpotenzen zwischen Bogenachse und Umgebung stationär aufrechterhalten, ohne daß Massenströme fließen, wenn der Außendruck hinreichend klein ist (ca. 1 Torr und kleiner). In den Abb. 4 und 5 sind die Ergebnisse, die unter Verwendung von SAHA- und Koronaformel gemacht wur-

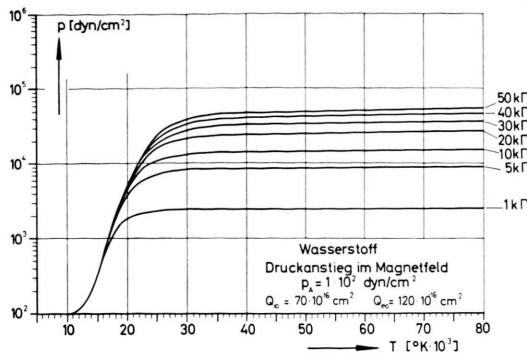


Abb. 1. Druck in Abhängigkeit von der Temperatur; Außen- druck $7,6 \cdot 10^{-2}$ Torr.

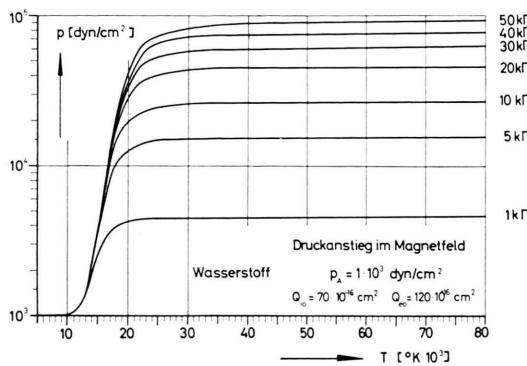


Abb. 2. Druck in Abhängigkeit von der Temperatur; Außen- druck $7,6 \cdot 10^{-1}$ Torr.

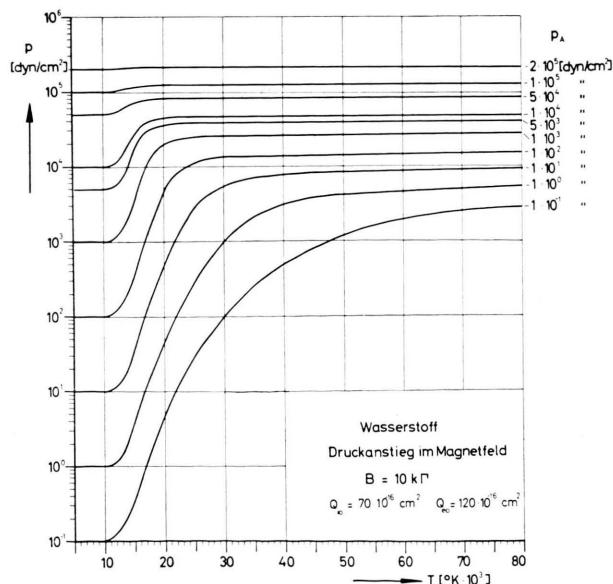


Abb. 3. Druck in Abhängigkeit von der Temperatur für ein Magnetfeld von 10 kG und verschiedene Außendrücke.

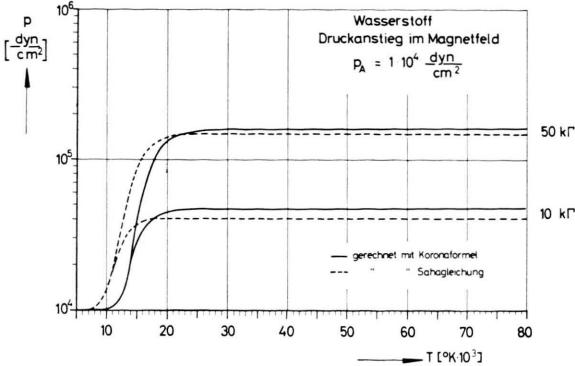


Abb. 4. Vergleich zwischen den mit Korona- und SAHA-Formel berechneten Drucken; Außendruck 7,6 Torr.

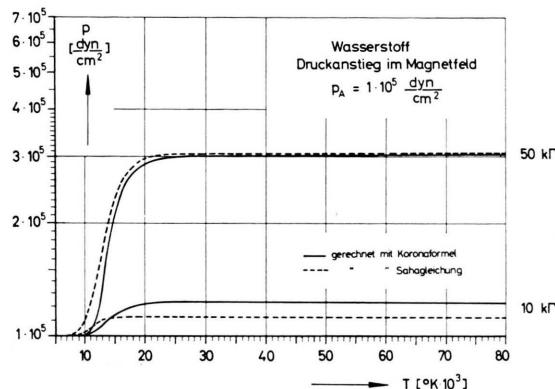


Abb. 5. Vergleich zwischen den mit Korona- und SAHA-Formel berechneten Drucken; Außendruck 76 Torr.

den, für die Drücke $p_A = 10^4 \text{ dyn/cm}^2$ bzw. $p_A = 10^5 \text{ dyn/cm}^2$ und die Magnetfeldstärken $B_A = 10 \text{ kG}$ bzw. $B_A = 50 \text{ kG}$ miteinander zu vergleichen.

Bei Gültigkeit der Koronaformel bemerkt man – dem späteren Einsetzen der Ionisation entsprechend – einen Druckanstieg erst bei höheren Temperaturen als im SAHA-Fall. Der erreichte Endwert (bei voller Ionisation) liegt bei niedrigen Drücken über dem SAHA-Wert. Bei höheren Ausgangsdrücken und höheren Magnetfeldern ist es umgekehrt (Abb. 5). Verglichen mit den Abweichungen, die durch die Unsicherheiten in der Größe der Wirkungsquerschnitte Q_{e0} und Q_{i0} verursacht werden (siehe ¹), sind die Unterschiede im Enddruck zwischen SAHA- und Koronawert jedoch klein.

Die Rechnungen wurden für den weiten Druckbereich von $1 \cdot 10^{-1}$ bis $2 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$ durchgeführt. Ob die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Koronaformel in der benutzten Form jeweils erfüllt sind, hängt unter anderem von den geometrischen

Abmessungen des Plasmas ab und muß von Fall zu Fall überprüft werden. Für die höheren Werte des Druckes im behandelten Bereich wird oft die SAHA-Gleichung eine bessere Näherung für die Plasmazusammensetzung liefern. Bei den niedrigen Drucken hingegen können Abweichungen der Temperaturen

der verschiedenen Teilchensorten voneinander die Anwendung der Rechenergebnisse auf experimentelle Plasmen erschweren.

Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Zur Bestimmung von Temperatur und Geschwindigkeit der Plasmaströmung aus einem Plasmabrenner

B. AHLBORN *

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. **20 a**, 466—474 [1965]; eingegangen am 24. Dezember 1964)

A two-step model of the heating processes in a plasma jet is given. In this model, a hot interior and colder sheath is postulated, and the conservation theorems for mass, momentum and energy are solved so that the plasma velocity and temperature can be calculated if the power supply, pressure fall over the heating length, and the cross-sectional area of the luminous plasma stream are known. The accelerating action of the electromagnetic forces is considered as well as the JOULE heating caused by the arc current.

This model was tested by using a newly developed method to measure the average velocity and by using spectroscopy to measure the temperature of the plasma jet. The applicability of the "two step" model is shown by these experiments.

Als Plasmabrenner soll eine Lichtbogenanordnung mit düsenförmiger Anode und konzentrischer Kathode (Abb. 1) bezeichnet werden, in der eine kalte Gasströmung auf hohe Temperaturen ($T > 10\,000^{\circ}\text{K}$) aufgeheizt wird, die die Anode als Plasmastrahl verläßt. Wegen der großen Strömungsgeschwindigkeit des Plasmastrahls und seines hohen Energieinhaltes haben Plasmabrenner für zahlreiche Zwecke technische Verwendung gefunden. Für viele Probleme wird daher gefordert, die Temperatur und die Geschwindigkeit des Plasmas mit einfachen Mitteln möglichst genau zu bestimmen und auch ihre Abhängigkeit von frei vorgebbaren Variablen des Brenners, wie Gasdurchsatz und Leistungszufuhr, anzugeben. Diese Zusammenhänge lassen sich beschreiben, wenn man den Plasmabrenner als Durchlauferhitzer für eine Gasströmung (eindimensional, ohne Reibung und Wärmeleitung) behandelt. Die bekannten Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie können dabei benutzt werden, um Mittelwerte für Geschwindigkeit und Temperatur hinter der Aufheizungszone zu berechnen. Leider unterscheiden sich diese über den ganzen Querschnitt ge-

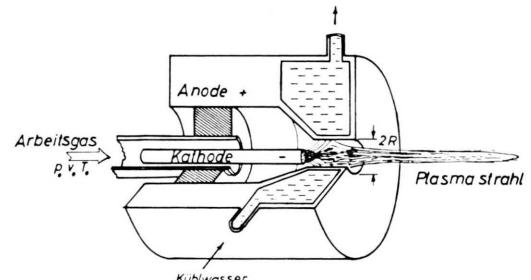


Abb. 1. Plasmabrenner.

mittelten Temperaturen und Geschwindigkeiten oft um mehr als den Faktor 2 von den im Plasmastrahl gemessenen Werten^{1, 2}. Dieser Ansatz — im folgenden „Einstufenmodell“ genannt — gibt daher nur ein qualitatives Bild der Vorgänge im Plasmabrenner.

Um eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment zu erhalten, haben wir das Einstufenmodell durch zwei Annahmen verfeinert und auch elektromagnetische Kräfte des Entladungsstromes berücksichtigt. Es wird dabei

* Auszug aus einer Dissertation der Technischen Hochschule München, 1964.

¹ R. E. JAHN, Brit. J. Appl. Phys. **14**, 585 [1963].

² W. NEUMANN, Exp. Techn. Phys. **10**, 124 [1962].